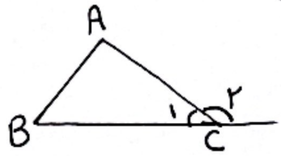
اثبات های فصل ۳ / ریاضی نهم

۱- نشان دهید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.
(کار در کلاس صفحه ۳۸، سوال ۳)



مجموع زاویه های داخلی مثلث

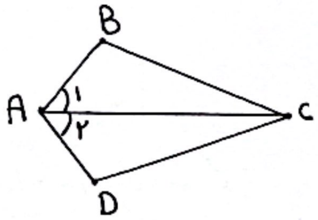
مجموع یک زاویه داخلی و خارجی

فرض	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1=180$ ، $\hat{C}_1+\hat{C}_2=180$
حکم	$\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$

زاویه خارجی — دو زاویه داخلی غیرمجاور

استدلال:
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1=180\\ \hat{C}_1+\hat{C}_2=180\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\cancel{\hat{C}_1}=\cancel{\hat{C}_1}+\hat{C}_2 \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{C}_2$$

۲- در چهارضلعی ABCD، پاره خط AC نیمساز زاویه A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث های $A\overset{\triangle}{B}C$ و $A\overset{\triangle}{D}C$ هم نهشت اند.
(فعالیت ۱، صفحه ۳۹)



نیمساز AC

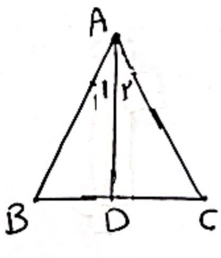
خودش واضح در سوال گفته

فرض	$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ ، $AD=AB$
حکم	$A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{D}C$

علامت هم نهشتی

استدلال:
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AD=AB\\ AC=AC \text{ مشترک}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{D}C$$

۳- در مثلث متساوی الساقین ABC، AD نیمساز وارد بر قاعده ی آن است. ثابت کنید نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می باشد.
(فعالیت ۲، صفحه ۳۹)

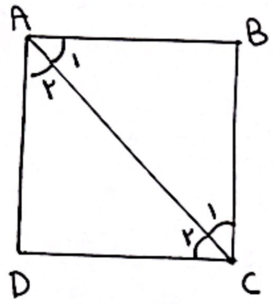


ساق های برابر — نیمساز AD

فرض	$AB=AC$ ، $\hat{A}_1=\hat{A}_2$
حکم	$BD=DC$

استدلال:
$$\left.\begin{matrix}AB=AC\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AD=AD \text{ مشترک}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{B}D \cong A\overset{\triangle}{D}C \Rightarrow BD=DC$$

۴ـ ثابت کنید در هر مربع، هر قطر، نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است. (فعالیت ۳، صفحه ۳۹)



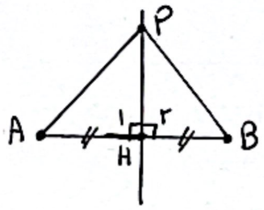
فرض	$AB=BC=DC=AD$ ، $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90$
حکم	$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ $\quad \hat{C}_1=\hat{C}_2$

استدلال :

$$\left.\begin{array}{l} AB=DC \\ BC=AD \\ \hat{B}=\hat{D}=90 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC} \Longrightarrow \begin{array}{l} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ \hat{C}_1=\hat{C}_2 \end{array}$$

اگر قطر BD را رسم کنیم، می‌توان به همین روش ثابت کرد که $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ و $\hat{D}_1=\hat{D}_2$.

۵ـ ثابت کنید هر نقطه‌ی دلخواه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط، به یک فاصله است. (فعالیت شماره ۵، صفحه ۴۰)

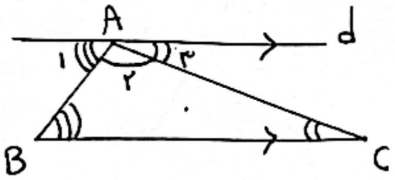


فرض	$\hat{H}_1=\hat{H}_2=90$ ، $AH=HB$
حکم	$AP=PB$

استدلال :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}_1=\hat{H}_2=90 \\ AH=HB \\ PH=PH \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{APH} \cong \overset{\triangle}{PBH} \Longrightarrow AP=PB$$

۶ـ ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است. (کار در کلاس صفحه ۴۰ و ۴۱)



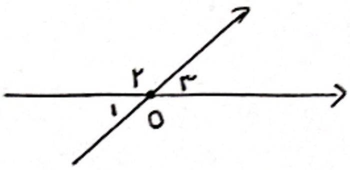
فرض	$\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3=180$ ، $\hat{A}_3=\hat{C}$ ، $\hat{A}_1=\hat{B}$
حکم	$\hat{B}+\hat{A}_2+\hat{C}=180$

استدلال :

$$\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3=180 \xrightarrow[\hat{A}_1=\hat{B}]{\hat{A}_3=\hat{C}} \hat{B}+\hat{A}_2+\hat{C}=180$$

جایگذاری می‌کنیم.

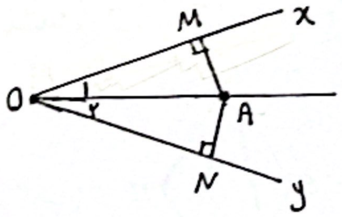
۷- نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند.
(فعالیت صفحه ۴۲)



فرض	$\hat{O}_1+\hat{O}_2=180$ ، $\hat{O}_2+\hat{O}_3=180$
حکم	$\hat{O}_1=\hat{O}_3$

استدلال :
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2=180\\ \hat{O}_2+\hat{O}_3=180\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1+\cancel{\hat{O}_2}=\cancel{\hat{O}_2}+\hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$$

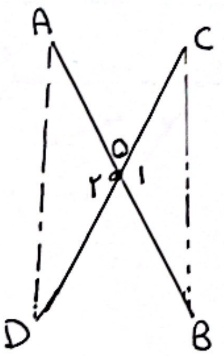
۸- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
(تمرین شماره ۴، صفحه ۴۳)



فرض	$\hat{O}_1=\hat{O}_2$ ، $\hat{M}=\hat{N}=90$
حکم	$AM=AN$

استدلال :
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ \hat{M}=\hat{N}=90\\ OA=OA \text{ وتر مشترک}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وز}} O\hat{M}A \cong O\hat{N}A \Rightarrow \underline{AM=AN}$$

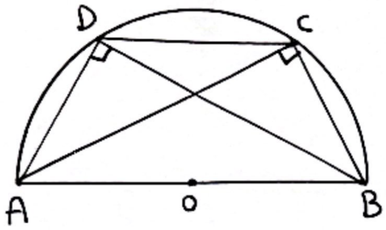
۹- در شکل مقابل نقطه O وسط AB و DC است. ثابت کنید AD=BC.
(مثال صفحه ۴۵)



فرض	$OA=OB$ ، $OD=OC$
حکم	$AD=BC$

استدلال :
$$\left.\begin{array}{l}OA=OB\\ OD=OC\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \text{ متقابل به رأس}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ضزض}} A\hat{O}D \cong B\hat{O}C \Rightarrow \underline{AD=BC}$$

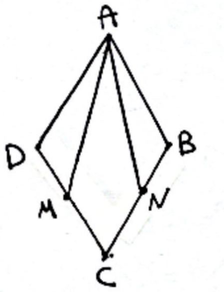
۱۰- در شکل مقابل داریم $AD=BC$ و O مرکز نیم‌دایره است. ثابت کنید $DB=AC$.
(فعالیت صفحه ۴۵)



فرض	$AD=BC$ ، $\hat{D}=\hat{C}=90$
حکم	$DB=AC$

استدلال :
$$\left.\begin{array}{r} AD=BC \\ \hat{D}=\hat{C}=90 \\ AB=AB \text{ وتر مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ABD} \Rightarrow AC=BD$$

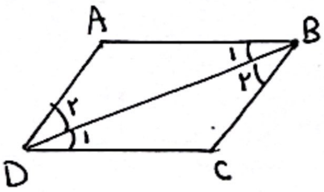
۱۱- در شکل مقابل $ABCD$ لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های ضلع‌های CD و CB هستند.
نشان دهید $\overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$
(فعالیت صفحه ۴۶)



فرض	ضلع لوزی $AD=AB$ ، زاویه‌های روبه‌رو $\hat{D}=\hat{B}$ ، نصف ضلع $DM=BN$
حکم	$\overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$

استدلال :
$$\left.\begin{array}{r} AD=AB \\ DM=BN \\ \hat{D}=\hat{B} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$$

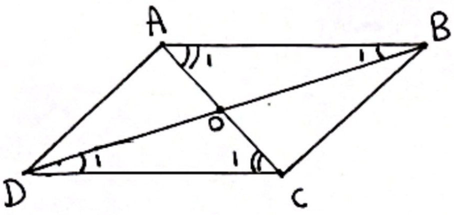
۱۲- ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های مقابل، با هم برابرند.
کار در کلاس صفحه ۴۶ و ۴۷



فرض	$(AB \parallel DC$ ، $AD \parallel BC$ ، DB مورب$) \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$ ، $\hat{B}_2=\hat{D}_2$
حکم	$AB=DC$ ، $AD=BC$

استدلال :
$$\left.\begin{array}{r} \hat{B}_1=\hat{D}_1 \\ \hat{B}_2=\hat{D}_2 \\ DB=DB \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \begin{array}{l} AB=DC \\ AD=BC \end{array}$$

۱۳ـ ثابت کنید قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند. (تمرین ۱، صفحه ۴۸)

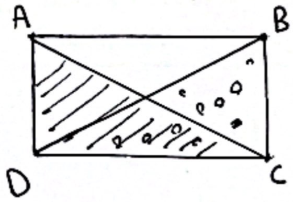


فرض	$\hat{A}_1=\hat{C}_1$ ، $\hat{B}_1=\hat{D}_1$
حکم	$OA=OC$ ، $OB=OD$

استدلال :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \hat{B}_1=\hat{D}_1\\ AB=DC \text{ طول متوازی الاضلاع}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زض ز}} A\overset{\triangle}{O}B \cong C\overset{\triangle}{O}D \Rightarrow OA=OC \text{ ، } OB=OD$$

۱۴ـ ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (تمرین ۲، صفحه ۴۸)

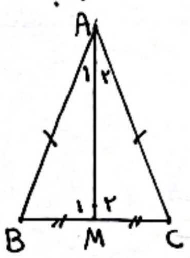


فرض	$AB=DC$, $AD=BC$, $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^\circ$
حکم	$AC=BD$

استدلال :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\hat{C}=90\\ AD=BC\\ DC=DC \text{ مشترک}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{D}C \cong B\overset{\triangle}{C}D \Rightarrow AC=BD$$

۱۵ـ در مثلث متساوی الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده ایم. مثلث های AMB و AMC به چه حالتی هم نهشت اند؟ چرا AM نیمساز زاویه $\hat{A}$ است؟ چرا AM بر BC عمود است؟ (تمرین ۳، صفحه ۴۸)



فرض	$AB=AC$ ، $BM=MC$
حکم	$A\overset{\triangle}{M}C \cong A\overset{\triangle}{M}B$

استدلال :

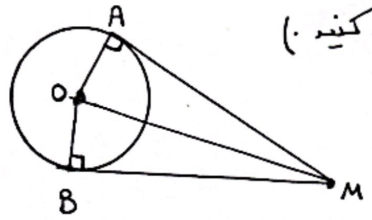
$$\left.\begin{array}{l}AB=AC\\ BM=MC\\ AM=AM \text{ مشترک}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\triangle}{B}M \cong A\overset{\triangle}{M}C \xRightarrow{\text{اجزای}} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \Rightarrow \text{ نیمساز } \hat{A} \text{ AM}$$

متناظر برابرند. $\hat{M}_1=\hat{M}_2 \xRightarrow[\hat{M}_1+\hat{M}_2=180]{} \hat{M}_1=\hat{M}_2=90^\circ$

AM بر BC عمود است.

۱۶ـ از نقطه M خارج از دایره O، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟ (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های M، A و B وصل کنید.)

(تمرین ۴، صفحه ۴۸)



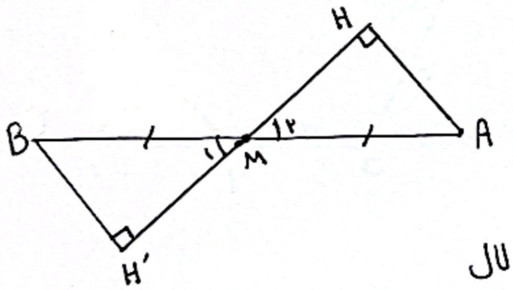
فرض	$OA=OB$ (شعاع دایره) ، $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$
حکم	$AM=BM$

★ شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس، عمود است.

استدلال:
$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ \hat{A}=\hat{B}=90^\circ \\ OM=OM \text{ وتر مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وض}} O\hat{A}M \cong O\hat{B}M \Longrightarrow \underbrace{AM=BM}$$

۱۷ـ در شکل مقابل نقطه M وسط AB است و $\hat{H}=\hat{H'}=90^\circ$. نشان دهید $AH=BH'$.

(مسئله دو روستا، صفحه ۴۹ و ۵۰)

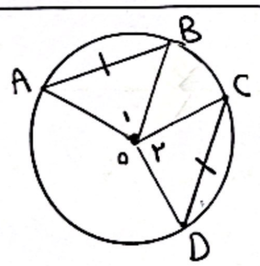


فرض	$BM=MA$ ، $\hat{H}=\hat{H'}=90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

استدلال:
$$\left.\begin{array}{l} BM=MA \\ \hat{H}=\hat{H'}=90^\circ \\ \hat{M}_1=\hat{M}_2 \text{ متقابل به راس} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وز}} B\hat{M}H' \cong A\hat{M}H \Longrightarrow \underbrace{AH=BH'}$$

۱۸ـ در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی اند. نشان دهید کمان های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی اند.

(فعالیت ۱، صفحه ۵۰)



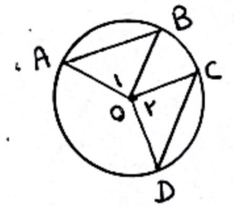
فرض	$CD=AB$ ، $OA=OB=OC=OD$ ← ★ شعاع های دایره مساوی اند.
حکم	$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}$

استدلال:
$$\left.\begin{array}{l} CD=AB \\ OA=OD \\ OB=OC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ضضض}} A\hat{O}B \cong C\hat{O}D \Longrightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \Longrightarrow \underbrace{\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}}$$

زاویه های مرکزی مساوی‌اند پس کمان های روبرو هم مساوی‌اند.

۱۹ـ در شکل مقابل کمان های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی اند. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

(فعالیت ۲، صفحه ۵۰)



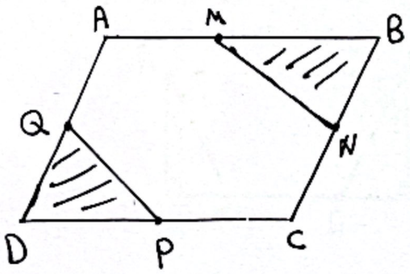
فرض	$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2$
حکم	$AB=CD$

استدلال :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ OA=OD \\ OB=OC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{O}B \cong C\overset{\triangle}{O}D \Rightarrow AB=CD$$

شعاع های دایره

۲۰ـ در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع است و M و N و P و Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع اند، ثابت کنید: $MN=PQ$.



فرض	$MB=AM=DP=PC$ ، $BN=NC=AQ=QD$
حکم	$MN=PQ$

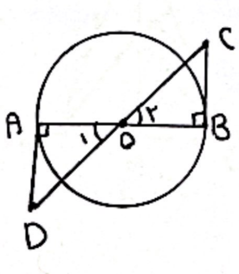
استدلال :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{D}=\hat{B} \\ MB=DP \\ BN=DQ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\triangle}{B}N \cong P\overset{\triangle}{D}Q \Rightarrow MN=PQ$$

(تمرین شماره ۱، صفحه ۵۱)

۲۱ـ در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس اند. نشان دهید که AD و BC برابرند.

(تمرین شماره ۲، صفحه ۵۱)



فرض	$\hat{A}=\hat{B}=90$ ، $OA=OB$ (شعاع)
حکم	$AD=BC$

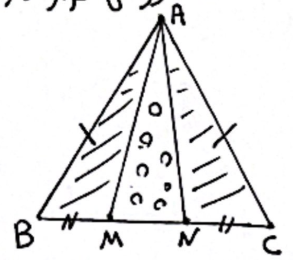
استدلال :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\hat{B}=90^\circ \\ OA=OB \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} O\overset{\triangle}{B}C \cong O\overset{\triangle}{A}D \Rightarrow AD=BC$$

متقابل به رأس

۲۲- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارند که $BM=NC$.
نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

(تمرین شماره ۳ صفحه ۵۱)

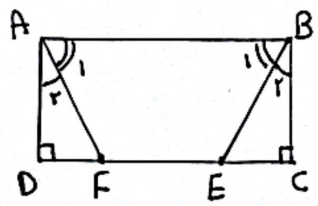


فرض	$AB=AC$ ، $\hat{B}=\hat{C}$ ، $BM=NC$
حکم	$AM=AN$

استدلال: $\left.\begin{array}{l} AB=AC \\ \hat{B}=\hat{C} \\ BM=NC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{B}M \cong A\overset{\triangle}{N}C \Rightarrow AM=AN \Rightarrow A\overset{\triangle}{M}N$ متساوی الساقین است.

۲۳- در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده‌اند که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند.
ثابت کنید BE و AF مساوی اند.

(تمرین ۴ صفحه ۵۲)

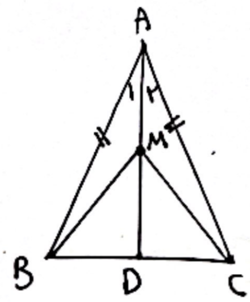


فرض	$\hat{A}_1=\hat{B}_1 \xRightarrow[\hat{B}_1+\hat{B}_2=90]{\hat{A}_1+\hat{A}_2=90} \hat{A}_2=\hat{B}_2$
حکم	$AF=BE$

استدلال: $\left.\begin{array}{l} \hat{A}_2=\hat{B}_2 \\ AD=BC \text{ عرض مستطیل} \\ \hat{D}=\hat{C}=90 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زض ز}} A\overset{\triangle}{D}F \cong B\overset{\triangle}{C}E \Rightarrow AF=BE$

۲۴- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است: $MB=MC$.

(تمرین شماره ۵ صفحه ۵۲)



فرض	$AB=AC$ ، $\hat{A}_1=\hat{A}_2$
حکم	$MB=MC$

استدلال: $\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AM=AM \text{ مشترک} \\ AB=AC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{B}M \cong A\overset{\triangle}{C}M \Rightarrow MB=MC$